• $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{2x}-e^{x}=0$

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$f'(x)=4e^{2x}-e^{x}=e^{x}\left(4e^{x}-1\right)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4e^{x}-1=0 \Leftrightarrow e^{x}=\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow x=\ln\frac{1}{4}=-\ln 4$

□Si $x \geq \ln\frac{1}{4}$:

$\Leftrightarrow e^{x}\geq\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4e^{x}\geq 1$

$\Leftrightarrow 4e^{x}-1\geq 0$

f Strictement croissante sur $\left[\ln\frac{1}{4},+\infty\right[$.

□Si $x\leq \ln\frac{1}{4}$:

$4e^{x}-1\leq 0$

f strictement décroissante sur $\left]-\infty,\ln\frac{1}{4}\right]$

$f\left(\ln\frac{1}{4}\right)=2e^{2\ln\frac{1}{4}}-e^{\ln\frac{1}{4}}$

$=2e^{\ln\frac{1}{16}}-e^{\ln\frac{1}{4}}=2\times\frac{1}{16}-\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{8}$

x	$-\infty$	$\ln\frac{1}{4}=-2\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↘	$-\frac{1}{8}$	↗ $+\infty$

3) $f(x)=0=2e^{2x}-e^{x}=0$

$\Leftrightarrow e^{x}\left(2e^{x}-1\right)=0, e^{x}\neq 0\Leftrightarrow 2e^{x}-1=0$

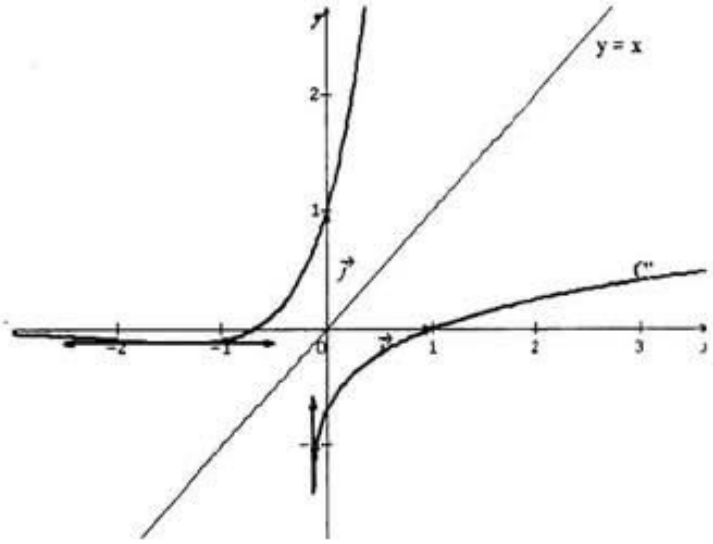
$\Leftrightarrow e^{x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}-e^{x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}\left(2e^{x}-1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}\times\left(2e^{x}-1\right)$

$=+\infty\times(+\infty)=+\infty$

$\Rightarrow C$ admet une B.I.P de direction $(o,\vec{j})$.



5) $I=\left[\ln\frac{1}{4},+\infty\right[$.

a) g est continue et strictement croissante sur I donc g réalise une bijection réciproque g^{-1} définie sur J tel que

$J=g(I)=\left[g\left(\ln\frac{1}{4}\right),\lim\limits_{x\to+\infty}g\right[=\left[-\frac{1}{8},+\infty\right[$

b) $C'=S_{\Delta}(C)$. avec $\Delta: y=x$.

c) $g(y)=x\Leftrightarrow y=g^{-1}(x)$, $y\in I, x\in J$

$g(y)=x\Leftrightarrow 2e^{2y}-e^{y}=x$

$\Leftrightarrow 2e^{2y}-e^{y}-x=0$ (*on cherche y*)

$\Delta=(-1)^{2}-4(-x)\times 2=1+8x$

$x\geq-\frac{1}{8}\Rightarrow 8x\geq-1\Rightarrow 8x+1\geq 0$

Donc :